

$\mathbb{N}$ taucht oft als „Indexmenge“ auf,

z.B. Kann es sein, dass man für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage $A(n)$ auf ihren Wahrheitsgehalt überprüfen will.

Beispiel: Gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Formel

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} ?$$

Wie beweist man simultan unendlich viele Behauptungen?

Im Rahmen der axiomatischen Konstruktion von $\mathbb{N}$ ergibt sich das

Prinzip der vollständigen Induktion:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Alle Aussagen sind wahr

falls man zeigen kann:

(I) Induktionsanfang: $A(1)$ wahr

(II) Induktionsschluss:

{ Unter der Hypothese $A(n)$ wahr }
 { hat ~~man~~ man die Gültigkeit von $A(n+1)$. }

Alternative Formulierung:

Sei $M \subset \mathbb{N}$. Es gilt $M = \mathbb{N}$,
falls

$$(I) \quad 1 \in M$$

$$(II) \quad \text{mit } n \text{ gehört auch } n+1 \text{ zu } M$$

Modifikation : Es gelte

$$(I)^* \quad A(\underline{n_0}) \text{ richtig für einen Startindex } n_0$$

$$(II)^* \quad \forall n \geq n_0 : [A(n) \text{ wahr} \implies A(n+1) \text{ wahr}]$$

Dann ist $A(n)$ für alle $n \geq n_0$ wahr.

Beispiele : wir benutzen hier und
nachfolgend die Abkürzungen

$$\sum_{k=m}^n a_k := a_m + \dots + a_n$$

(Summe der Zahlen $a_m, \dots, a_n$)

$$\prod_{k=m}^n a_k := a_m \cdot \dots \cdot a_n$$

(Produkt der Zahlen $a_m, \dots, a_n$),

wobei $m \leq n$ aus $\mathbb{N}$.

1.) Beh: $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Bw: $\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} \quad \checkmark$

Gelte die Formel nun für ein $n \in \mathbb{N}$.
(Induktionsvoraussetzung)

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n+1) \quad \begin{array}{c} \text{Vor} \\ \uparrow \end{array}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \left[\frac{n}{2} + 1 \right] =$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Die Formel gilt auch für $n+1$. □

2) Bih : $\forall n \geq 3$

$$\begin{array}{c} 2 \\ n \geq n+4 \end{array}$$

(hier kann man erst mit $n_0 = 3$ anfangen)

Bew : $n = 3$ ✓

Schluss von n auf $n+1$ für $n \geq 3$:

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \quad \begin{array}{c} \geq \\ \text{Vor} \end{array}$$

$$(n+4) + 2n + 1 =$$

$$(n+1)+4 + 2n > (n+1) + 4$$



3) Beh.: für alle $n \in \mathbb{N}$ und jede Zahl $x \neq 1$ ist

$$\sum_{k=1}^n x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1-x}$$

Biw.: ($n=1$) $\sum_{k=1}^1 x^k = x$ und

$$\frac{\cancel{x} - x^2}{1-x} = \frac{x(1-x)}{1-x} = x$$

Schluss von n auf $n+1$: $\sum_{k=1}^{n+1} x^k =$

$$\sum_{k=1}^n x^k + x^{n+1} = \text{J.V.}$$

$$\frac{X - X^{n+1}}{1 - X} + X^{n+1} =$$

$$\frac{X - X^{n+1}}{1 - X} + \frac{X^{n+1} - X^{n+2}}{1 - X} =$$

$$\frac{X - X^{n+2}}{1 - X}$$



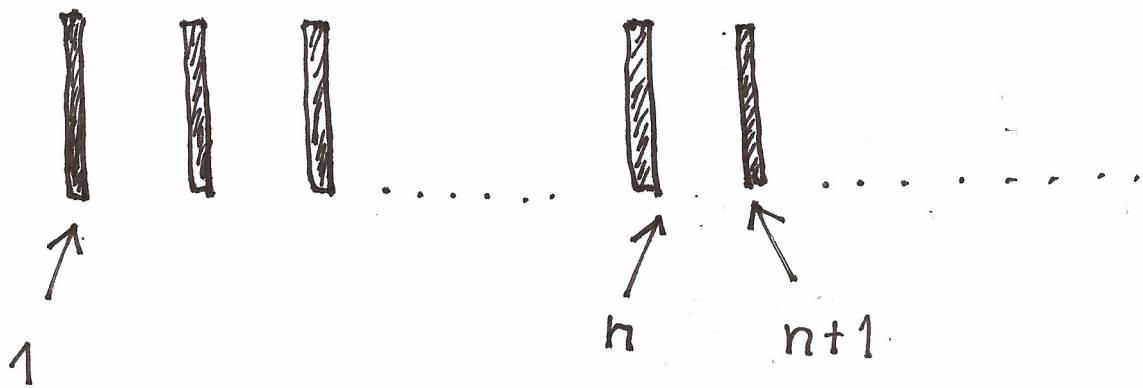
Tiefere Anwendungen des
Induktionsprinzips :

Rekursive Definitionen, etc.
kommen gleich, zuvor noch
eine Veranschaulichung

Induktionsprinzip :

-50-

„Domino - Effekt“



Aufstellung: ^{der Steine} Wenn Nr. $\textcircled{n}$ kippt, fällt
so wird Nr. $\textcircled{n+1}$ getroffen und ~~kippt~~ fällt.
(Induktionsschluss)

Also braucht man nur Nr. $\textcircled{1}$ anzustoßen
(Induktionsanfang) und alle Steine
fallen. (Natürlich ohne
Zeitverzug wie beim physikalischen Vorgang)

-50*

Beh: In $\forall$ ^{einem} n -Tupel $(a_1, \dots, a_n)$,
 $n \in \mathbb{N}$, sind stets alle Elemente
 gleich.

Bw? $n=1$ richtig!

" $n \rightarrow n+1$ ": betrachte ein $(n+1)$ -Tupel
 " $\underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ Tupel}}$

$(\underbrace{a_1, a_2, \dots, a_n}_{n \text{ Tupel}}, a_{n+1})$

$$\text{I.V. : } \begin{cases} a_1 = a_2 = \dots = a_n, \\ a_2 = \dots = a_{n+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_1 = \dots = a_{n+1}$$



Rekursionsprinzip :

(beweisbar im Rahmen der Konstruktion von $\mathbb{N}$)

Sei X eine beliebige Menge. Eine Abbildung $\boxed{\varphi : \mathbb{N} \rightarrow X}$ wird vollständig beschrieben durch Angabe von

- $\varphi(1)$

- einer Rekursionsvorschrift (Formel), die $\varphi(n+1)$ aus den Größen

$$n, \varphi(1), \dots, \varphi(n)$$

bestimmt

Beispiele:

1.) Potenzen: Sei x eine Zahl.

Man setzt

$$f(1) := x,$$

$$f(n+1) := x \cdot f(n).$$

Also: $f(2) = x \cdot x$, $f(3) = x \cdot x \cdot x, \dots$

Man schreibt

$$x^n := f(n) \implies$$

$$x^{n+1} = x \cdot x^n$$

← vgl. Def. 2.1

2.) Fakultäten: Jetzt sei

$$f(1) := 1, \quad f(n+1) := (n+1) \cdot f(n)$$

Schreibweise :

$$n! := f(n)$$

Vereinbarung: $0! = 1$

Tiefere Anwendungen des Induktionsprinzips

① Existenz des Minimums

Sei $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$. Eine Zahl $k \in A$ heißt Minimum von A , falls

$$k \leq a \quad \forall a \in A$$

Satz 2.1: Es gibt ein Minimum von A .

Beweis: Sei

$$W := \{n \in \mathbb{N} : n \leq a \quad \forall a \in A\}$$

offenbar $W \neq \emptyset$, da $1 \in W$

es gibt ein $\boxed{k \in W}$ mit

$$\boxed{k+1 \notin W}$$

indirekte Begründung: andernfalls wäre
für alle $k \in \mathbb{N}$ der Schluss

$$\boxed{k \in W \implies k+1 \in W}$$

richtig.

Induktionsprinzip: $\boxed{W = \mathbb{N}}$,

das geht nicht, Widerspruch!

Also findet man k wie oben.

"Rechnen" nach: k ist Minimum, also
speziell $k \in A$!



② Variante des Induktionsprinzips:

-55-

(mehr Info beim Induktionsschluss)

Satz 2.2 : Seien $n_0 \in \mathbb{N}$ und eine

Menge $W \subset \mathbb{N}$ gegeben. Es gelte:

(i) $n_0 \in W$

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ gilt:

Falls $n_0, n_0+1, \dots, n \in W$,
so auch $n+1 \in W$.

Dann umfasst W alle Zahlen $\geq n_0$

Folgerung: Seien $A(n)$ für $n \geq n_0$

Aussagen.

$A(n)$ ist wahr für

alle $n \geq n_0$, falls :

• $A(n_0)$ wahr

• Aus „ $A(n_0), \dots, A(n)$ wahr“
folgt „ $A(n+1)$ wahr“.

mit Satz 2.1

Beweis von Satz 2.2: Sei

$$\mathbb{N}_{n_0} := \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}.$$

Zu zeigen:

$$\mathbb{N}_{n_0} \subset \mathbb{W}$$

Indirekt:

Annahme

$$\exists \boxed{n > n_0, n \notin \mathbb{W}}$$

Dann ist

$$A := \{m \in \mathbb{N} : m > n_0, m \notin \mathbb{W}\} \neq \emptyset$$

Satz 2.1
 $\Rightarrow$

A hat ein kleinstes Element k

$\Rightarrow$

Die Zahlen $m \in \mathbb{N}$ mit



$$n_0 \leq m \leq k-1$$

liegen nicht in A

Fall 1: ~~Annahme~~ $k = n_0 + 1$

Voraussetzung (ii) $\Rightarrow k \in W$, da $n_0 \in W$

Widerspruch, da ja $k \in A$!

Also gilt

Fall 2: $k > n_0 + 1$

Dann liegen nach $\circledast$ die Zahlen

$n_0 + 1, \dots, k-1$

nicht in $A \Rightarrow$

$$n_0 + 1, \dots, k-1 \in W$$

und wegen $n_0 \in W$ folgt mit (ii):

$$k \in W, \text{ Widerspruch!}$$



Beispiele:

1.) Definiere rekursiv

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \sum_{k=1}^n k a_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Beh: Für $n \geq 2$ ist

$$a_n = \frac{1}{2} \prod_{k=1}^n k$$

Beweis: „ $n_0 = 2$ “

Schluss: $\left\{ \begin{array}{l} a_m = \dots \text{ gelte für } \underline{m} = 2, \dots, n \\ \Rightarrow a_{n+1} = \dots \end{array} \right.$

Vorab beweise mit „normaler Induktion“ nach n

$$\forall n \geq 2: \sum_{k=2}^n k \left(\prod_{l=1}^k l \right) = \left(\prod_{l=1}^{n+1} l \right) - 2$$

(Skript)

2.) Definition 2.1 : Fakultäten

$$n! := \prod_{k=1}^n k, \quad n \in \mathbb{N},$$

bzw. rekursiv

$$1! := 1, \quad (n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

$n!$ wächst extrem schnell:

$$10! = 3\,628\,800,$$

$$100! > 10^{157} \dots\dots\dots$$

Kombinatorische Anwendungen, z.B.

Satz 2.3 : Sei A eine Menge mit genau n Elementen. Die Anzahl der bijektiven Abbildungen $f: \{1, \dots, n\} \rightarrow A$ ist $n!$

alternativ: es gibt $n!$ Möglichkeiten,
 n Objekte in eine Reihenfolge zu bringen

Beweis : 1.) $A = \{a\}$ ($n=1$) klar!

2.) $n \rightarrow n+1$: Sei $A = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$,
 also $(n+1)$ -elementig.

• Setze a_{n+1} auf Platz 1 ($f(1) := a_{n+1}$)

$\text{J.V.} \Rightarrow n!$ Möglichkeiten für $a_1, \dots, a_n$;

• Setze a_{n+1} auf Platz 2 ($f(2) := a_{n+1}$)

$\text{J.V.} \Rightarrow \dots$;

$\vdots$

• $\dots$ $a_{n+1} \dots$ Platz $n+1$ $\text{J.V.} \Rightarrow$

$n!$ Möglichkeiten für $a_1, \dots, a_n$

Die Gesamtzahl der insgesamt
möglichen Abbildungen

$$f: \{1, \dots, n+1\} \longrightarrow \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$$

ist daher $(n+1)n! = (n+1)!$
 $\square$

Zwischinstop: $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Z} := \{ \dots -2, -1, 0, 1, 2 \dots \}$$

"ganze Zahlen" $\supsetneq \mathbb{N}$; Konzept:

man kann in $\mathbb{Z}$ beliebig subtrahieren,

d.h. :

Zu jedem Paar $n, m \in \mathbb{Z}$
existiert genau ein $x \in \mathbb{Z}$
mit

$$m + x = n$$

Schreibweise:

$$x = n - m$$

algebraische Formulierung:

$(\mathbb{Z}, +)$ ist eine abelsche Gruppe
mit neutralem Element 0.

Multiplikation und Ordnung werden wie
üblich auf $\mathbb{Z}$ fortgesetzt, z.B.

$$-1 < 0 < 1, \text{ etc.}$$

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen
erweitert $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ multiplikativ:

Zu $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ und $n \in \mathbb{Z}$
gibt es in $\mathbb{Q}$ eine eindeutige
Lösung q von $m \cdot q = n$.

Schreibweise: $q = \frac{n}{m}$;

$$n = 1 \leadsto q = \frac{1}{m} \text{ oder } m^{-1}$$

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper.

In § 3 definieren wir $\mathbb{R}$ ($\supset \mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$), dort stehen dann alle Rechenregeln und Eigenschaften auch von $\mathbb{Q}$.